第 23卷第 3期 上海电力学院学报 Vol. 23 No. 3
2007年 9月 Journal of Shanghai University of Electric Power Sep. 2007

文章编号：1006－4729(2007)03－0284－03

函数列一致连续和一致收敛及等度连续的关系

徐 丽

(上海电力学院 数理系，上海 200092)

摘 要：连续、一致连续、一致收敛和等度连续是函数或函数列非常重要的性质. 针对收敛的函数列，探讨了一致连续、一致收敛和等度连续两两之间的关系，并在有界区间上给出了一致连续、一致收敛和等度连续的等价关系.

关键词：函数列；一致连续；一致收敛；等度连续
中图分类号：TB112；O189.13 文献标识码：A

Relation of Uniform Continuity and Uniform Convergence and Equicontinuity on Sequence of Functions

XU Li
(Dept. of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China)

Abstract: Continuity, uniform continuity, uniform convergence and equicontinuity are very important qualities of functions or sequence of functions. For sequence of functions, the relation of uniform continuity, uniform convergence and equicontinuity is studied. Their equivalence relation is presented with sequence of functions set in a bounded interval.

Key words: sequence of function; uniform continuity; uniform convergence; equicontinuity

连续、一致连续、一致收敛和等度连续是函数或函数列非常重要的性质，因此探讨这些性质相互之间的关系十分有意义. 在闭区间上，函数的连续性与一致连续性是等价的，收敛函数列的一致收敛性与等度连续性是等价的[1]. 一致收敛函数列的极限函数具有连续性[2]，反之不成立. 本文针对函数列，在有界区间上探讨一致连续、一致收敛和等度连续之间的关系.

1 概 述

定义 1 设 $f(x)$是定义在区间 I上的函数，若对任意正数 ε，存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，只要 $x', x''\in I$，且 $|x'-x''|<\delta$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$在区间上 I一致连续[1].

定义 2 设 $\{f_n(x)\}$是定义在区间 I上的函数列，对每一固定的 $x\in I$，若对任意正数 ε，存在整数 $N(\varepsilon, x)$，使得当 $n>N$时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$收敛，$f(x)$是 $\{f_n(x)\}$的极限函数[2]，记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x\in I)$$

定义 3 设函数列 $\{f_n(x)\}$与函数 $f(x)$定义在同一区间 I上[2]，如果对任意正数 ε，存在整数

收稿日期：2007－04－06

$N(\varepsilon)$, 使得当时 $n>N$ 时, 对一切 $x\in I$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$, 记作

$$f_n(x)\Rightarrow f(x)\quad(n\to\infty),\quad x\in I$$

定义 4 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 若对任意正数 ε, 存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得当 $x_1, x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 对一切的 n 有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续[3].

2　等度连续到一致连续

由定义 1 和定义 4 可得以下定理.

定理 1 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续, 那么对任意的 n, $f_n(x)$ 在 I 上一致连续. 反之不一定成立.

我们还可以证明如下定理.

定理 2 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ (x\in I)$, 那么 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

证　明　因为 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续, 所以对任意正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $x_1, x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 对一切的 n 有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$$

令 $n\to\infty$, 取极限可得

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

证毕.

反之不一定成立.

例如　$\{f_n(x)\}=\{x^2/(x^2+(1-nx)^2)\}$, $f(x)=0$, 显然

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\quad(x\in[0,1])$$

虽然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续, 但是 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不等度连续.

3　等度连续和一致收敛的关系

设 $I=\langle a,b\rangle$ 表示有界区间, 其中 a, b 为有限数, I 可以是开区间, 也可以是闭区间, 也可以是半开半闭区间.

定理 3 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有界区间设 $I=\langle a,b\rangle$ 上等度连续, 若在 I 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, 则

$$f_n(x)\Rightarrow f(x)\quad(n\to\infty),\quad x\in I$$

证　明　$\{f_n(x)\}$ 是等度连续的, 由定理 1 和定理 2 可知, $f_n(x)$, $f(x)$ 在 I 上一致连续, 又因 I 是有界区间, 所以 $f_n(a+0)$, $f_n(b-0)$, $f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在且有限, $f_n(x)$, $f(x)$ 在 I 上连续[1]. 令 $f_n(a)=f_n(a+0)$, $f_n(b)=f_n(b-0)$, $f(a)=f(a+0)$, $f(b)=f(b-0)$, 则 $f_n(x)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ (x\in I)$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ (x\in[a,b])$.

下面证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$[4].

由于 $f_n(x)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 所以对任意的正数 ε, 存在正数 δ 使得当 $x', x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

现在将 $[a,b]$ K 等分, 使每一小区间的长度 $T<\delta$ 只要令 $[(b-a)/K]<\delta$ 即可). 记 K 等分的各分点为 $a=a_0<a_1<\cdots<a_k=b$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a_i)=f(a_i)$, 所以对上述的 $\varepsilon>0$, 存在 N_i, 使得 $n>N_i$ 时, 有

$$|f_n(a_i)-f(a_i)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(i=1,2,\Lambda,K)$$

令 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_k\}$, 则 $n>N$ 时, 对任意的 $x\in[a,b]$, 存在 $a_i\ (i\in\{1,2,\cdots,K\})$, 使得

$$|a_i-x|<\delta$$

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(a_i)|+|f_n(a_i)-f(a_i)|+|f(a_i)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

这就证明了在 $[a,b]$ 上

$$f_n(x)\Rightarrow f(x)\quad(n\to\infty)$$

从而在 I 上

$$f_n(x)\Rightarrow f(x)\quad(n\to\infty)$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证毕.

从上面的证明易看出, 条件 $f_n(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$ 只须在 $[a,b]$ 上某个稠密子集 $\{a_i\}$ 上成立即可.

定理 4 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 在 $I=\langle a,b\rangle$ 上一致连续, 若 $n\to\infty$ 时, $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 I 上, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续.

证　明　因为在 I 上 $f_n(x)$ 一致连续, $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 I 上一致

连续[2], 即对任意的正数 ε, 存在正数 $\exists\ \delta_0$, 当 x', $x''\in I$, $|x'-x''|<\delta_0$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由一致收敛性, 对此 $\varepsilon>0$, 存在整数 N, 当 $n>N$ 时, 对一切的 $x\in I$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$|f_n(x')-f_n(x'')|\leqslant|f_n(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|+|f(x'')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

对剩下的 $f_1(x)$, $\cdots$, $f_N(x)$, 由一致连续性, 每个 $f_i(x)$ ($i=1, 2, \cdots, N$), 都存在正数 δ_i, 当 x', $x''\in I$, $|x'-x''|<\delta_i$ 时, 有

$$|f_i(x')-f_i(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

这时取 $\delta=\min\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_N\}$, 则对任意的 x', $x''\in I$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时, 对一切 n, 恒有

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$$

从而证明了 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续.

证毕.

由定理 3 和定理 4 以及在闭区间上函数连续与一致连续的等价关系可得如下推论[1].

推论 1 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 和函数 $f(x)$, 如果 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \cdots$) 连续, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 那么 $\{f_n(x)\}$ 等度连续的充要条件是 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ ($n\to\infty$).

4 一致连续到一致收敛

定理 5 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 和函数 $f(x)$ 在有界区间 $I=\langle a, b\rangle$ 上都一致连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 则 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ ($n\to\infty$).

证 明 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 $I=\langle a, b\rangle$ 上都一致连续, 又因 I 是有界区间, 所以 $f_n(a+0)$, $f_n(b-0)$, $f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在且有限, $f_n(x)$, $f(x)$ 在 I 上连续[1]. 令 $f_n(a)=f_n(a+0)$, $f_n(b)=f_n(b-0)$, $f(a)=f(a+0)$, $f(b)=f(b-0)$, 则 $f_n(x)$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ ($x\in I$), 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ ($x\in[a, b]$).

即对每一 $x_\lambda\in[a, b]$, 对任意的正数 ε, 存在整数 $N_\lambda=N(\varepsilon, x_\lambda)$, 当 $n>N_\lambda$ 时, 有

$$|f_n(x_\lambda)-f(x_\lambda)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由于 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故对上述 ε 和 n, 存在 δ_λ, 当 $|x-x_\lambda|<\delta_\lambda$ 时, 有

$$|f_n(x)-f_n(x_\lambda)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x)-f(x_\lambda)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_\lambda)|+|f_n(x_\lambda)-f(x_\lambda)|+|f(x_\lambda)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

这时 $\{(x_\lambda-\delta_\lambda, x_\lambda+\delta_\lambda)\}$, $x_\lambda\in[a, b]$, 组成 $[a, b]$ 上的一个开覆盖, 根据有限覆盖定理[1], 其中存在有限个子覆盖, 记之为 $\{(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\}$ $i=1, 2, \cdots, n$, 取 $N=\max\{N_1, N_2, \cdots, N_n\}$, 则 $n>N$ 时, 对任意的 $x\in[a, b]$, 存在 $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $x\in(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)$, 从而有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

这就证明了在 $[a, b]$ 上, $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ ($n\to\infty$), 从而在 $I=\langle a, b\rangle$ 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ ($n\to\infty$).

证毕.

由上面的证明可知:

推论 2 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上都一致连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 则 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ ($n\to\infty$).

5 一致连续到等度连续

由定理 4 和定理 5 可推得如下结论.

定理 6 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 和函数 $f(x)$ 在有界区间 $I=\langle a, b\rangle$ 上都一致连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续.

推论 3 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 和函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续.

6 三者之间的关系

由以上定理可得一致连续、一致收敛和等度连续之间的等价关系.

定理 7 定义在有界区间 I 上的函数列 $\{f_n(x)\}$

(下转第 **291** 页)

撞后仍然表现为形状不变的孤立波, 即具有碰撞后保持本质不变的准粒子特性.

3 结束语

使用 Mathematica对 KDV中的单孤立子性质及双孤子碰撞过程进行定性与定量研究, 尤其值得注意的是, 尽管 KDV方程的双孤子间碰撞过程很复杂, 但使用 Mathematica软件不仅大大简化了编程, 而且又定量地输出了非常生动的动画图像, 形象地展示了 KDV方程的孤立子解的物理特点及双孤子碰撞中表现的准粒子特性. 本文对使用 Mathematica定量研究复杂物理过程进行了有效探索.

参考文献:

[1] 谷超豪, 郭柏灵, 李翊神, 等. 孤立子理论及其应用[M]. 杭州: 浙江技术出版社, 1990. 1-20.

[2] 郭柏灵. 孤立子[M]. 北京: 科学出版社, 1987. 1-11.

[3] 陆同兴. 非线性物理概论[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2002. 260-266.

[4] 张磊, 朱思铭. KDV方程的孤立子解的探讨和求解[J]. 非线性动力学学报, 2004, 4(8): 77-80.

[5] 王振东. 孤立波与孤立子[J]. 力学与实践, 2005, 5(27): 86-88.

[6] 刘正荣. 关于孤立子的研究[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2003, 3(25): 207-211.

[7] 刘秀茹, 王祖源, 吴于人, 等. 水中孤波的探讨[J]. 大学物理, 2004, 11(23): 6-11.

[8] Peng Yan-Ze. A new multisoliton solutions to (2+1)-dimensional KDV equation[J]. Commun. Theor. Phys, 2004, (41): 669-670.

[9] 邓建松, 彭冉冉. Mathematica使用指南[M]. 北京: 科学出版社, 2002. 10-50.

(上接第 286页)

和函数 $f(x)$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, 则下列条件等价:

(1) $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$和 $f(x)$在 I上一致连续;

(2) $\{f_n(x)\}$在 I上等度连续;

(3) $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ $(n\to\infty)$于 I上, 且 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在 I上一致连续.

有了这一定理, 我们很容易解决下面的题目.

例 **1** 设 $\{f_n(x)\}=\{x^2/(x^2+(1-nx)^2)\}$, $x\in[0,1]$, 证明 $\{f_n(x)\}$在 $[0,1]$上不是等度连续的.

证 明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x)$

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|\geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1\ (n\to\infty)$$

所以 $\{f_n(x)\}$在 $[0,1]$上不一致收敛, 从而 $\{f_n(x)\}$不等度连续.

7 结束语

本文针对收敛的函数列, 探讨了一致连续、一致收敛和等度连续两两之间的关系, 并在有界区间上给出了一致连续、一致收敛和等度连续的等价关系.

参考文献:

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991.

[3] 邹应. 数学分析: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.

[4] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.