文章编号: 1006－4729(2012)02－0193－05

Farkas 引理及其应用

李康弟

(上海电力学院 数理学院,上海 200090)

摘 要: 由凸集分离定理引出了 Farkas 引理,进而给出了 3 个择一性定理,并运用 Farkas 引理和择一性定理,证明了优化中的 KT 定理、可行域算法中的 KT 条件、广义优化中的 Tucker 引理和博弈论中的 Minmax 定理.

关键词: 凸集分离定理; Farkas 引理; 择一性定理

中图分类号: O177.92; O224 **文献标志码:** A

Farkas Lemma and Its Application

LI Kang-di

(*School of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai* 200090, *China*)

Abstract: The Farkas lemma is introduced by using convex separation theorem, three alternative theorems are given by using Farkas lemma. The proofs of KT theorma in optimization, KT condition in feasible algorithm, Tucker lemma in generalied optimization and Minmax theorem in games are given.

Key words: convex separation theorem; Farkas lemma; alterative theorem

在非线性优化问题[1]、Nash 平衡问题[2]和非线性互补问题[3]中,通常要利用线性不等式组的相容性定理或者非齐次线性不等式组的择一性定理. 这些择一性定理构成了凸多面体的理论基础,并在凸多面体的结构、线性规划理论和求解等方面都起着重要作用.

本文利用凸集分离定理,引出了 Farkas 引理. 同时,系统地引进了 3 个重要形式的择一性定理,通过择一性定理来阐述约束优化中的一些基本定理,并且利用择一性定理证明了著名的 Tucker 引理和博弈论中 Minmax 定理.

1 Farkas 引理和择一性定理

根据文献[1]可以给出凸集分离定理.

引理 1 设 $S\subset R^n$ 是非空闭凸集,$y\in R^n$,$y\notin S$,则存在向量 $P\neq 0$ 和实数 $\alpha\in R$,使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\alpha<\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\ \forall\,\boldsymbol{x}\in S \tag{1}$$

即存在超平面 $H=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\alpha\}$ 严格分离 y 和 S.

通过构造闭凸集 $S=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\geqslant 0\}$,利用引理 1,便可证明著名的 Farkas 引理[4]. 另外,运用 Farkas 引理可研究不等式组解的存在性问题[5].

引理 2(Farkas 引理) 设 $A\in R^{n\times n}$,$\boldsymbol{b}\in R^n$,则下列两个关系等式组有且仅有一组有解:

$$A\boldsymbol{x}\leqslant 0,\quad \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0 \tag{2}$$

$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{y}\geqslant 0 \tag{3}$$

利用 Farkas 引理来推得 3 个择一性定理.

定理 1 设 $A\in R^{m\times n}$,则下列两个关系式组有

收稿日期: 2011－12－15

通讯作者简介: 李康弟(1965－),男,博士,教授,上海人. 主要研究方向为非线性规划. E-mail: likangdi@shiep.edu.cn.

且仅有一组有解:

$$Ax < 0 \tag{4}$$

$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{y} \geqslant 0, \boldsymbol{y} \neq 0 \tag{5}$$

证　明　如果式(4)有解,即存在 $\bar{x} \in R^n$,使得 $A\bar{x} < 0$,则对所有的 $\bar{y} \geqslant 0, \bar{y} \neq 0$,有 $\bar{y}^{\mathrm{T}} A \bar{x} < 0$,即 $\bar{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \bar{y} < 0$,这表明式(4)无解.

如果式(4)无解,则不存在 $\alpha < 0$ 及 $\boldsymbol{x} \in R^n$,使得 $A\boldsymbol{x} \leqslant (\alpha, \cdots, \alpha)^{\mathrm{T}}$. 记 $\bar{A} = [A, -\boldsymbol{e}]$, $\bar{\boldsymbol{b}} = (0, 0, \cdots, 0, -1)^{\mathrm{T}}$,式中 $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \in R^m$,于是不存在 $\alpha < 0$ 及 $\boldsymbol{x} \in R^n$,满足:

$$\bar{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \alpha \end{pmatrix} \leqslant 0 \qquad \bar{\boldsymbol{b}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \alpha \end{pmatrix} > 0$$

即上述关系组无解. 于是由 Farkas 引理,关系组 $\bar{A}\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \geqslant 0$ 有解,即关系组 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 1, \boldsymbol{y} \geqslant 0$ 有解,这等价于式(5)有解.

定理 2　设 $A \in R^{m \times n}, B \in R^{p \times n}$,则关系组

$$A\boldsymbol{x} < 0, B\boldsymbol{x} = 0 \tag{6}$$

无解,当且仅当存在 $\boldsymbol{u} \in R^m, \boldsymbol{u} \geqslant 0, \boldsymbol{u} \neq 0, \boldsymbol{v} \in R^p$,满足:

$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} + B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = 0 \tag{7}$$

证　明　假设式(6)无解,等价于不存在 $\alpha < 0$ 及 $\boldsymbol{x} \in R^n$,满足 $A\boldsymbol{x} \leqslant (\alpha, \cdots, \alpha)^{\mathrm{T}}, B\boldsymbol{x} \leqslant 0, -B\boldsymbol{x} \leqslant 0$. 记:

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{e} \\ B & 0 \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{b}} = (0, 0, \cdots, 0, -1)^{\mathrm{T}} \in R^{n+1}$$,其中 $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \in R^m$,则不存在 $\alpha < 0$ 及 $\boldsymbol{x} \in R^n$,满足:

$$\bar{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \alpha \end{pmatrix} \leqslant 0, \bar{\boldsymbol{b}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \alpha \end{pmatrix} > 0 \tag{8}$$

因此,式(6)无解,当且仅当式(8)无解. 根据 Farkas 引理,式(8)无解,等价于关系组 $\bar{A}\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{y} \geqslant 0$ 有解. 记:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} \in R^m, \boldsymbol{w} \in R^p, \boldsymbol{z} \in R^p$$

则有:

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} + B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} - B^{\mathrm{T}}z = 0 \\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1 \\ \boldsymbol{u} \geqslant 0, \boldsymbol{w} \geqslant 0, \boldsymbol{z} \geqslant 0 \end{cases}$$

由 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1$ 知 $\boldsymbol{u} \neq 0$,再令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}$,则知式(7)成立.

利用 Farkas 引理,可以得到下面的扩展择一性定理[6].

定理 3　对于矩阵 $A \in R^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in R^n$,下面两个系统有且仅有一个有解.

系统 1:

$$(A, I_m)\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{x} \geqslant 0, \boldsymbol{x} \neq 0$$

系统 2:

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ I_m \end{pmatrix}\boldsymbol{y} > 0$$

式中,$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$.

进一步可得,系统 1 有解,即存在 $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$,满足:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n + m$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} x_j = 1$$

系统 2 有解,即存在 $y_1, \cdots, y_n$,满足:

$$y_i > 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} > 0, j = 1, 2, \cdots, n$$

2　Farkas 引理的应用

2.1　优化中的 Kuhn-Tucker 定理

对于仅含不等式约束优化问题:

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m \tag{9}$$

可以利用定理 1 进行推导求解.

定理 4(Fritz John 定理)　设 $\bar{x}$ 是问题(9)的可行点,f 和 $g_i(i \in I(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}$ 处可微,$g_i(i \in I(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}$ 处连续,若 $\bar{x}$ 是问题(9)的局部极小点,则存在不全为零的非负数 $u_0, u_i(i \in I(\bar{x}))$,使得:

$$u_0 \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) - \sum_{i \in I(\bar{x})} u_i \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \tag{10}$$

如果 $g_i(i \notin I(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}$ 处也可微,则存在不全为零的非负数 $u_0, u_1, \cdots, u_m$,使得:

$$\begin{cases} u_0 \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) - \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \\ u_i(\bar{\boldsymbol{x}}) g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{11}$$

证　明　因为 $\bar{x}$ 要成为局部极小点,则在 $\bar{x}$ 处不存在可行下降方向,由文献[7]可知,关系组:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}} d < 0 \\ -\nabla g_i(\bar{x})^{\mathrm{T}} d < 0, i \in I(\bar{x}) \end{cases} \tag{12}$$

无解.

由定理 1 可以得出,必存在不全为零的非负数 $u_0, u_i(i \in I(\bar{x}))$,使得式(10)成立.

定理 5(Kuhn-Tucker 定理) 设 $\bar{x}$ 是问题(9)的可行点,f 和 $g_i(i \in I(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}$ 处可微,$g_i(i \in I(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}$ 处连续,并且 $\nabla g_i(\bar{x})(i \in I(\bar{x}))$ 线性无关. 若 $\bar{x}$ 是问题(9)的局部极小点,则存在不全为零的非负数 $u_i(i \in I(\bar{x}))$ 使得:

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I(\bar{x})} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \tag{13}$$

如果 $g_i(i \notin I(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}$ 处也可微,则存在不全为零的非负数 $u_i \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, m)$,使得:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ u_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{14}$$

证 明 根据 Fritz John 定理,存在不全为零的非负数 $\bar{u}_0, \bar{u}_i(i \in I(\bar{x}))$,使得:

$$\bar{u}_0 \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \tag{15}$$

若 $\bar{u}_0 \neq 0$,则由 $\bar{u}_i(i \in I(\bar{x}))$ 不全为零知 $\nabla g_i(\bar{x})(i \in I(\bar{x}))$ 线性相关,这与已知条件矛盾. 因此,$\bar{u}_0 > 0$. 令:

$$u_i = \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_0}, i \in I(\bar{x})$$

则 $u_i \geqslant 0(i \in I(\bar{x}))$,且式(13)成立.

如果 $g_i(i \notin I(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}$ 处也可微,则只要 $u_i = 0(i \notin I(\bar{x}))$,式(14)就成立.

对于一般约束优化问题:

$$\min \quad f(x) \tag{16}$$

$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \leqslant 0, j = 1, 2, \cdots, m \tag{17}$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, 2, \cdots, l \tag{18}$$

利用定理 2,并借助几何条件[5],同样可以得出 Kuhn-Tucker 定理,具体证明略.

2.2 可行域算法中的 KT 条件

对于线性约束的优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ & E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{19}$$

式中,$f(\boldsymbol{x})$ 为可微函数,A 为 $m \times n$ 矩阵,E 为 $l \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x} \in R^n$,$\boldsymbol{b} \in R^m$,$\boldsymbol{e} \in R^l$.

若 $\boldsymbol{x}$ 是问题(19)的可行解,在点 $\boldsymbol{x}$ 处有 $A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$,$A_2\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}_2$,其中:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

则非零向量 $\boldsymbol{d}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 处的可行方向的充要条件是 $A_1\boldsymbol{d} \geqslant 0$,$E\boldsymbol{d} = 0$. 由此可知,若 $\boldsymbol{d}$ 同时满足:

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} < 0, A_1\boldsymbol{d} \geqslant 0, E\boldsymbol{d} = 0$$

则 $\boldsymbol{d}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 处的可行下降方向. 这使得确定搜索方向问题归结为求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{d} \geqslant 0 \\ & E\boldsymbol{d} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

因此,利用 Farkas 引理可以证明定理 6.

定理 6 设 $\boldsymbol{x}$ 是问题(19)的可行解,在点 $\boldsymbol{x}$ 处有 $A_1\boldsymbol{x} = b_1$,$A_2\boldsymbol{x} > b_2$,其中:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{x}$ 为 KT 点的充要条件是问题(20)的目标函数最优解为零.

证 明 由 KT 点的含义可知,$\boldsymbol{x}$ 是问题的 KT 点,即存在向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \geqslant 0$ 使得:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) - A_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = 0 \tag{21}$$

令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$,$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \geqslant 0$,则式(21)可以写成

$$(-A_1^{\mathrm{T}}, -E^{\mathrm{T}}, E^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix} = -\nabla f(\boldsymbol{x}), \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{22}$$

由 Farkas 引理,式(22)有解的充分必要条件是:

$$\begin{pmatrix} -A_1 \\ -E \\ E \end{pmatrix} \boldsymbol{d} \leqslant 0, -\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} > 0$$

无解,即:

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} < 0, A_1\boldsymbol{d} \geqslant 0, E\boldsymbol{d} = 0$$

无解,这等价于问题(20)的目标函数为零.

在非线性约束问题(9)的可行域算法中,若 $\boldsymbol{d}$ 是可行下降方向,则必须满足不等式组:

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} < 0, \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} > 0, i \in I(\bar{x})$$

则可以将问题(9)转化为:

$$\begin{aligned} \min \quad & z, \\ \text{s.t.} \quad & \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} - z \leqslant 0, \\ & \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} + z \geqslant 0 \end{aligned} \tag{23}$$

因此,利用择一性定理可以证明定理 7.

定理 7 设 $\boldsymbol{x}$ 是问题(9)的可行解,函数 $f(\boldsymbol{x})$,$g(\boldsymbol{x})(i \in I(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}$ 点处可微,函数 $g_i(\boldsymbol{x})(i \notin I(\boldsymbol{x}))$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处连续,则 $\boldsymbol{x}$ 成为 Fritz John 点

的充分必要条件是问题(23)的目标函数最优值为零.

证 明 对于问题(23),目标函数最优值为零的充分必要条件是不等式组:

$$\begin{cases}\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}<0\\ \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}>0,i\in I(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

无解,即不等式组

$$\begin{cases}\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}<0\\ -\nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}<0,i\in I(\boldsymbol{x})\end{cases}\tag{24}$$

根据定理1,式(24)无解的充分必要条件是存在不全为零的数 $u_0\geqslant 0$ 和 $u_i\geqslant 0,i\in I(\boldsymbol{x})$,使得:

$$u_0\nabla f(\boldsymbol{x})-\sum_{i\in I}u_i\nabla g_i(\boldsymbol{x})=0\tag{25}$$

即 $\boldsymbol{x}$ 是 Fritz John 点.

下面,可以利用 Farkas 引理来论证 Tucker 引理[8].

2.3 广义优化中的 Tucker 引理

引理3(Tueker 引理) 考虑齐次线性不等式组:

$$\begin{cases}A\boldsymbol{x}\geqslant 0\\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A=0,\boldsymbol{u}\geqslant 0\end{cases}$$

则该不等式组存在解 $\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{u}^0$ 满足: $\alpha_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{u}_1^0>0$. 其中,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 A 的第1列.

证 明 考虑关系式:

(1) $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{\alpha}_1$

(2) $A\boldsymbol{x}\geqslant 0,-\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}<0$

下面分两种情况讨论.

若(1)有解,存在 $\bar{u}$ 满足:

$$A^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}=-\boldsymbol{\alpha}_1,\bar{\boldsymbol{u}}\geqslant 0$$

令: $\boldsymbol{u}^0=(\bar{u}_1+1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_m)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{0}$

则 $\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{x}^0$ 满足:

$$A\boldsymbol{x}^0\geqslant 0,A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^0=\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}^0\geqslant\boldsymbol{0},u_1^0>\boldsymbol{0}$$

并且 $\alpha_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0+u_1^0>0$.

若(1)无解,由 Farkas 引理知(2)必有解. 设其为 $\boldsymbol{x}^0$,则有 $A\boldsymbol{x}^0\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{0}$.

取 $\boldsymbol{u}^0=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{u}^0$ 满足:

$$A\boldsymbol{x}^0\geqslant 0,A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^0=0,\boldsymbol{u}^0\geqslant 0$$

并且 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{u}_1^0>0$. 因此,Tucker 引理成立.

2.4 矩阵博弈论中的 Minmax 定理

对于两人的矩阵博弈中,局中人1有 m 个纯策略,同时局中人2有 n 个纯策略. 记 A 的(i,j)元素为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,于是 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,a_{ij}表示局中人1取策略 a_i,而局中人2取策略 b_j 这种情况下局中人1的收益,同时也是局中人2的支出. 下面利用扩展择一性定理3,来证明矩阵博弈中的 Minmax 定理.

定理8(Minimax 定理) 对于矩阵博弈 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,记 $v_1=\max\limits_X\min\limits_Y X^{\mathrm{T}}AY=\max\limits_X v_Y(X)$,$v_2=\min\limits_Y\max\limits_X X^{\mathrm{T}}AY=\min\limits_Y v_X(Y)$.

式中,$X=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}},x_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^m x_i=1,Y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},y_i\geqslant 0,\sum\limits_{j=1}^n y_j=1$,则必有 $v_1=v_2$.

证 明 假设定理3的系统1成立,可知对一切 Y 有:

$$v_X(Y)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}A_i.Y=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\leqslant 0$$

于是,$v_2=\min\limits_Y v_X(Y)\leqslant 0$.

再设定理3中的系统2成立,由于:

$$v_Y(x)=\min_{1\leqslant j\leqslant n}x^{\mathrm{T}}A.j=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^m x_ia_{ij}>0$$

于是,$v_1=\max\limits_X v_Y(X)>0$.

由此可知,$v_1\leqslant v_2$ 成立. 上面又证明了命题 $v_2\leqslant 0$ 或者 $v_1>0$ 成立,故 $v_1\leqslant 0$ 与 $v_2>0$ 不成立,即不等式组 $v_1\leqslant 0<v_2$ 不成立.

由此出发证明,不存在任何实数 τ,满足 $v_1\leqslant\tau<v_2$. 事实上,对于任何实数 τ,令 $b_{ij}=a_{ij}-\tau,i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,B=(b_{ij})_{m\times n}$,于是对任何混合策略对$(X,Y)$,都有 $X^{\mathrm{T}}BY=X^{\mathrm{T}}(A-(\tau))Y=X^{\mathrm{T}}AY-\tau$.

记:

$$v_1(B)=\max_X\min_Y X^{\mathrm{T}}BY,v_2(B)=\min_Y\max_X X^{\mathrm{T}}AY$$

易知 $v_1(B)=v_1-\tau,v_2(B)=v_2-\tau$.

根据上述结论可知,不等式组 $v_1(B)\leqslant 0<v_2(B)$ 不成立. 由此可知,不等式 $v_1<v_2$ 不成立. 但由于 $v_1\leqslant v_2$,故必有 $v_1=v_2$.

3 结 语

本文利用 Farkas 引理,给出了3个择一性定理,并研究了其在约束优化问题和博弈论中的一些应用. 文中给出的择一性定理在广义最优化理论及非线性互补理论和算法中有着重要的应用,值得进一步研究.

参考文献:

[1] NOCEDAL J, WRIGHT J. Numerical optimization [M]. Springer-Verlag, New York, 2002: 91-100.

[2] GOVINDAN S, WILSON R. A global method to compute Nash equilibria [J]. Economic Theory, 2003, 10(1): 65-86.

[3] LIU X W, PERAKIS G, SUN J. A robust SQP method for mathematical programs with linear complementarity constraints [J]. Computational Optimization and Application, 2006, 34(1): 5-33.

[4] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 40-43.

[5] 谢政, 李建平, 汤泽滢. 最优化理论与方法 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003: 35-37.

[6] 侯定丕. 博弈论导论 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2003: 18-21.

[7] 袁亚湘. 非线性优化计算方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2008: 8-12.

[8] 魏权龄, 闫洪. 广义最优化理论和模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 120-124.

(编辑 白林雪)

(上接第 192 页)

不能合理反映用户对系统削峰填谷效应及所需系统容量成本的差异.

参考文献:

[1] World Bank Staff Working Paper No. 340. Electric power pricing policy [R]. U. S.: Washington, D. C., 1979: 51-53.

[2] 赵连生. 电力价格设计-边际成本定价理论的应用 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1992: 69-71.

[3] 程瑜. 销售电价建模研究 [D]. 北京: 华北电力大学, 2006.

[4] 黄海涛. 销售电价非线性定价模型和实现方法研究 [D]. 北京: 华北电力大学, 2010.

[5] 李娅. 销售电价中用户分类模型研究 [D]. 北京: 华北电力大学电气工程学院, 2009.

[6] CHICO G, NAPOLI R. Customer characterization option for improving the tariff offer [J]. IEEE Trans. On Power System, 2003, 18(1): 381-388.

[7] ENRICO Carpaneto, GIANFRANCO Chicco, ROVERTO Napoli, *et al*. Electricity customer classification using frequency-domain load pattern data [J]. Electrical Power and Energy Systems, 2006(8): 13-20.

[8] TSEKOURAS G J, HATZIARGYRIOU N D, DIALYNAS E N. Two-stage pattern recognition of load curves for classification of electricity customers [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2007, 22(3): 1 120-1 128.

[9] TSEKOURAS G J, KOTOULAS P B, TSORELOS C D, *et al*. A pattern recognition methodology for evaluation of load profiles and typical days of large electricity customers [J]. Electric Power Systems Research, 2008: 494-510.

[10] WENDER J T. Peak load pricing in the electric utility industry [J]. Bell J Econ, 1976, 7(1): 232-241.

[11] 杨君昌. 公共定价理论 [M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2002: 52-56.

[12] 丹尼尔 F 史普博. 管制与市场 [M]. 余晖, 何帆, 钱家骏, 等译. 上海: 三联书店, 1999: 127-128.

[13] MITCHELL B M, MANNING W G J, ACTION J P. Peak load pricing [M]. U. K.: Ballinger Publishing Co., 1978: 45-61.

[14] KENNETH E Train. Optimal regulation: the economic theory of natural monopoly [M]. U. S.: The MIT Press, 1991: 252-261.

(编辑 苏 娟)