

DOI: 10.3969/j.issn.1006-4729.2016.02.006

# 内聚力模型在裂纹萌生及扩展中的应用

孙家啟, 纪冬梅, 唐家志

(上海电力学院 能源与机械工程学院, 上海 200090)

**摘要:** 断裂及开裂是工程中严重的结构失效形式. 结合传统断裂力学中应力强度因子  $K$  以及  $J$  积分, 综述了内聚力模型基本思想及发展, 分析了典型的内聚力模型及模型应用的局限性, 总结了不同内聚力模型在有限元中的实现形式, 概述了国内外学者关于内聚力模型解决不同材料裂纹萌生与扩展的研究状况, 得出了内聚力模型可以用以研究裂纹尖端塑性变形、静力和疲劳载荷条件下的蠕变开裂, 以及金属、岩土材料及混凝土、复合材料及纳米晶材料裂纹萌生与裂纹扩展的结论.

**关键词:** 内聚力模型; 有限元方法; 裂纹萌生; 裂纹扩展

中图分类号: TB383.1

文献标志码: A

文章编号: 1006-4729(2016)02-0129-06

## Application of Cohesive Zone Model on Crack Initiation and Propagation

SUN Jiaqi, JI Dongmei, TANG Jiazhi

(School of Energy and Mechanical Engineering, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China)

**Abstract:** Breaking and cracking are serious structural engineering failure modes. In combination with stress intensity factor  $K$  and  $J$ -integral of the traditional fracture mechanics, the basic idea and development of Cohesive Zone Model (CZM) are reviewed. The typical model of CZM and the limitation of the model application are analyzed. The implementation of the model in the form of finite element is summarized. The research of the domestic and foreign scholars about the CZM to solve different material crack initiation and extension are summarized. It is concluded that the CZM can be used to study the crack tip plasticity deformation, creep cracking under the condition of static and fatigue loading, as well as metal, geotechnical materials and concrete, composite materials and nanocrystalline materials crack initiation and crack propagation.

**Key words:** cohesive zone model; the finite element method; crack initiation; crack propagation

对于含裂纹结构失效的问题, 尤其是裂纹尖端应力场的分布与演化, 研究者们尝试采用不同

的方法予以解决. 1921 年, GRIFFITH A A<sup>[1]</sup> 提出, 当裂纹扩展过程中释放的弹性应变能与新裂

收稿日期: 2015-03-23

通讯作者简介: 孙家啟 (1990-), 男, 在读硕士, 河南濮阳人. 主要研究方向为基于内聚力的涡轮盘蠕变-疲劳微裂纹演化行为. E-mail: sunjiaqi1206@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金 (51201097).

纹形成的表面能相等时,裂纹就会失稳扩展,这对脆性材料的断裂理论做出了开创性研究。<sup>[2]</sup>严格地说,Griffith 理论只适用于理想脆性材料,IRWIN G R<sup>[3]</sup>和 OROWAN E<sup>[4]</sup>各自提出了裂纹尖端区域塑性耗散功的理论,将 Griffith 理论应用到工程材料中. 1958 年,IRWIN G R<sup>[5]</sup>提出了临界应力强度因子概念,巧妙地将能量释放率和裂纹尖端应力强度因子结合起来,进一步推动了断裂力学的发展. 1961 年,PARIS P C 等人<sup>[6]</sup>将应力强度因子理论应用于疲劳裂纹扩展的研究中. 当裂纹尖端塑性区尺寸不能忽略时,裂纹尖端塑性区域的应力应变场已无法由 K 场表征. RISE J R<sup>[7]</sup>提出了与路径无关的 J 积分,奠定了弹塑性断裂力学的理论框架. J 积分虽然可以处理弹塑性材料的断裂问题,但对于塑性过程区相当大的裂纹前缘,萌生后裂纹的扩展过程是人们更为感兴趣的阶段,<sup>[8]</sup>而且传统断裂力学往往不适用于研究裂纹的萌生阶段.

近年来,内聚力模型(Cohesive Zone Model, CZM)已被广泛应用于有关裂纹扩展的研究中,相比于应力强度因子  $K$ ,内聚力的存在使得裂纹尖端保持闭合的趋势,在一定程度上减轻甚至消除了应力的奇异性. CZM 将裂纹问题归结为一个非线性边值问题,并不需要起裂扩展准则,而且该模型基于弹塑性断裂力学,其适应性强,可以解决很多的非线性、大变形问题.

本文综述了 CZM 的发展过程、与有限元算法结合的具体实现,以及基于内聚力模型的有限元算法在不同材料裂纹萌生与扩展中的应用.

## 1 内聚力模型

### 1.1 内聚力模型的发展

CZM 首先由 DUGDALE D S<sup>[9]</sup>和 BARENBLATT G I<sup>[10]</sup>提出,BARENBLATT G I 将 CZM 应用于脆性材料的断裂研究中,DUGDALE D S 采用类似 CZM 模型,研究了裂纹尖端的屈服和塑性区尺寸的大小. 在这些早期关于非线性断裂的研究中,当内聚力区尺寸小于裂纹和试样尺寸时,CZM 理论与 GRIFFITH A A 的能量平衡理论等效. 对于内聚应力的分布,DUGDALE D S 将其看作在数值上等于材料的屈服强度,但这与物理事实不符. BARENBLATT G I 认为内聚应力是内聚

区裂纹面各点处裂纹张开位移的函数,在分子尺度上引入了内聚力,但符合这一特性的解析式较难具体给出,而实际情况下,多数研究者仍然假设内聚力为常数.

HILLERBORG A 等人<sup>[11]</sup>在 BARENBLATT G I 的基础上加入了拉伸强度,首次将内聚力模型应用到有限元计算中,模拟了脆性材料的断裂过程. 该模型不仅允许已有裂纹的增长,还允许新裂纹的萌生与演化,并且完整地描述了基于该模型断裂过程的细节. NEEDLEMAN A<sup>[12]</sup>采用高次多项函数,模拟了延性材料的断裂情况. KOLHER 等人<sup>[13]</sup>在对镍铝合金的剪切断裂性能进行数值模拟时,采用了分段函数的方法来描述 CZM.

CZM 的实质是表征分子和原子间相互作用的简化模型,裂纹的尖端被假定为两个裂纹界面组成的一个很小的内聚区,内聚区的本构关系即界面上作用牵引力  $T$  与两裂纹面间相对位移  $U$  之间的关系. 图 1 为内聚力模型和裂纹尖端内聚区的分布.

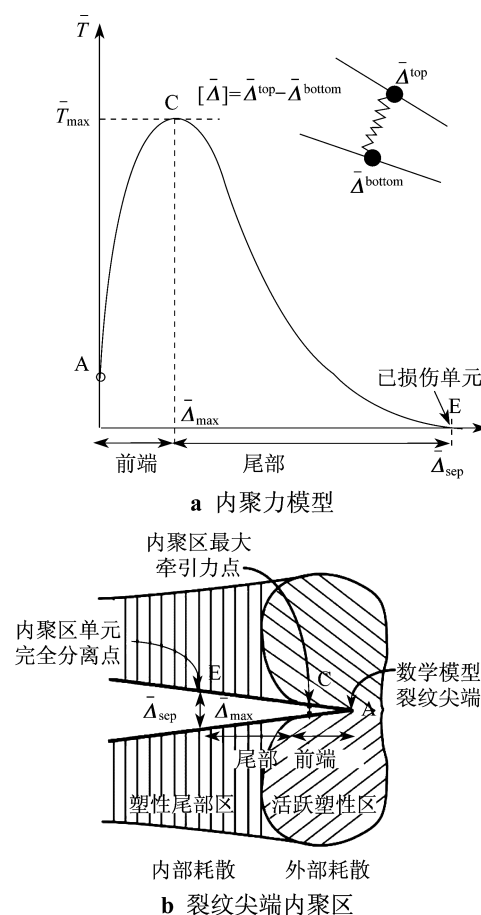


图 1 内聚力模型及裂纹尖端内聚区

图 1 中,由未完全承载的点 A 开始, $T$  随着  $U$  的

增加而增加,随之达到一个应力最大值  $T_{\max}$  的点 C,此时该材料点的应力承载达到了最大值,材料点开始出现初始损伤.随着界面位移的继续增大,应力开始下降,该阶段为材料点的损伤扩展阶段,点 E 为裂纹界面完全分离的材料点,其承载降为零.

内聚力区内应力的变化通过内聚力法则和裂纹界面位移联系起来,针对不同的材料,可以选择不同的内聚力法则,通过选取适当的参数,可以反映界面层的强度、韧度等力学性能.

## 1.2 内聚力模型分类

### 1.2.1 基于有效位移的内聚力模型

基于位移的内聚力模型将裂纹上下表面之间的有效牵引力  $\bar{T}$  定义为有效分离位移  $\bar{\Delta}$  的函数,即牵引力分离法则.常见的牵引力分离法则有线性软化、双线性软化,以及指数、梯形等.将模型中有效牵引力与内聚强度  $\sigma_{\max}$  归一化处理如图 1 所示.不同模型的区别在于  $\bar{T}$  与  $\bar{\Delta}$  之间函数关系的不同,通常情况下,材料的断裂是基于裂纹面法向应力  $T_n$  的 1 型裂纹和基于裂纹面切向应力  $T_t$  的 2 型裂纹的混合失效模式.

TVERGAARD V<sup>[14]</sup> 引入的内聚力模型为:

$$T_n = \frac{\bar{T}(\bar{\Delta})}{\bar{\Delta}} \frac{\Delta_n}{\delta_n}, T_t = \frac{\bar{T}(\bar{\Delta})}{\bar{\Delta}} \alpha_e \frac{\Delta_t}{\delta_t} \quad (1)$$

式中:  $\delta_n, \delta_t$  ——断裂时对应的断裂面法向和切向位移;

$\bar{\Delta}$  ——无量纲有效位移,  $\bar{\Delta} = \sqrt{(\Delta_n/\delta_n)^2 + (\Delta_t/\delta_t)^2}$  ;

$\bar{T}(\bar{\Delta})$  ——立方多项式模型有效牵引力,  $\bar{T}(\bar{\Delta}) = \frac{27}{4} \sigma_{\max} \bar{\Delta} (1 - 2\bar{\Delta} + \bar{\Delta}^2)$  ;

$\alpha_e$  ——无量纲 1 型和 2 型断裂模式混合常数;

$\Delta_n, \Delta_t$  ——裂纹面法向和切向位移.

式(1)是基于有效位移的内聚力模型的代表形式,如文献[15]提出的内聚力模型为:

$$\psi = \delta_n \int_0^{\bar{\Delta}} \bar{T}(\bar{\delta}) d\bar{\delta} \quad (2)$$

式中:  $\psi$  ——界面表面能.

而法向和切向的牵引力  $T_n$  和  $T_t$  满足

$$T_n = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\Delta}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \Delta_n} = \frac{\bar{T}(\bar{\Delta})}{\bar{\Delta}} \frac{\Delta_n}{\delta_n} \quad (3)$$

$$T_t = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\Delta}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \Delta_t} = \frac{\bar{T}(\bar{\Delta})}{\bar{\Delta}} \frac{\delta_n}{\delta_t} \frac{\Delta_t}{\delta_t} \quad (4)$$

令  $\alpha_e = \delta_n/\delta_t$ , 式(3)和式(4)即式(1)的特例.

文献[16]提出的能够应用于多晶脆性材料和沥青混凝土的线性软化模型为:

$$T_n = \sigma_{\max} \frac{D_s}{1 - D_s} \frac{\Delta_n}{\delta_n} \quad (5)$$

$$T_t = \tau_{\max} \frac{D_s}{1 - D_s} \frac{\Delta_t}{\delta_t} \quad (6)$$

式中:  $\sigma_{\max}$  ——法向内聚强度;

$\tau_{\max}$  ——切向内聚强度;

$D_s$  ——内部残余强度变量.

上述模型亦可以扩展到三维裂纹的模拟,然而基于有效位移的内聚力模型存在以下两个问题:一是模型在软化条件下,正的刚度容易造成不合理的牵引力-位移关系的出现;二是模型的断裂能为常数,而实际上 1 型裂纹和 2 型裂纹的断裂能不同,在混合断裂模式中,断裂能不是常数,所以模型不能进行混合断裂的模拟.

### 1.2.2 基于势能的通用内聚力模型

基于有效位移的内聚力模型在解决裂纹扩展中出现的问题,可以在基于势能的通用内聚力模型中得到解决.基于势能的通用内聚力模型应用三次多项式表示法向牵引力,用线性关系式表示切向牵引力,例如文献[17]应用于研究空穴形成和生长的模型为:

$$\psi(\Delta_n, \Delta_t) = \frac{27}{4} \sigma_{\max} \delta_n \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^2 \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \alpha_s \left( \frac{\Delta_t}{\delta_n} \right)^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) + \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^2 \right] \right\} \quad (7)$$

式中:  $\alpha_s$  ——剪切刚度参数.

由界面表面能函数可得到法向和切向牵引力:

$$T_n = \frac{\partial \psi}{\partial \Delta_n} = \frac{27}{4} \sigma_{\max} \delta_n \left\{ \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) + \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. \alpha_s \left( \frac{\Delta_t}{\delta_n} \right)^2 \left[ \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) - 1 \right] \right\}$$

$$T_t = \frac{\partial \psi}{\partial \Delta_t} = \frac{27}{4} \sigma_{\max} \left\{ \alpha_s \left( \frac{\Delta_t}{\delta_n} \right) \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) + \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^2 \right] \right\}$$

(8)

式中,  $\Delta_n < \delta_n$ , 但当  $\Delta_n > \delta_n$  时, 对应点的内聚力为零.

## 2 内聚力模型在有限元中的实现

内聚力模型在断裂力学研究的问题上有诸多的优势, 并且随着计算机计算能力和有限元方法的日益发展, 更多的研究者开始使用和改进内聚力模型并结合有限元方法, 用以解决多种材料的断裂问题.

有限元中内聚力模型的实现方式是引入内聚力单元, 利用内聚力单元建立界面周围材料之间的应力应变关系, 用应力 - 位移形式, 即用 TSL (Traction Separation Law) 来定义内聚力单元的本构关系. 当内聚力单元的应力或应变状态满足损伤起始准则后, 内聚力单元开始发生损伤, 即进入损伤演化阶段. 目前, TSL 法则主要有双线性、梯形、多项式以及指数等多种表达式, 图 2 给出了常见的线性衰减演化和指数衰减演化模式.

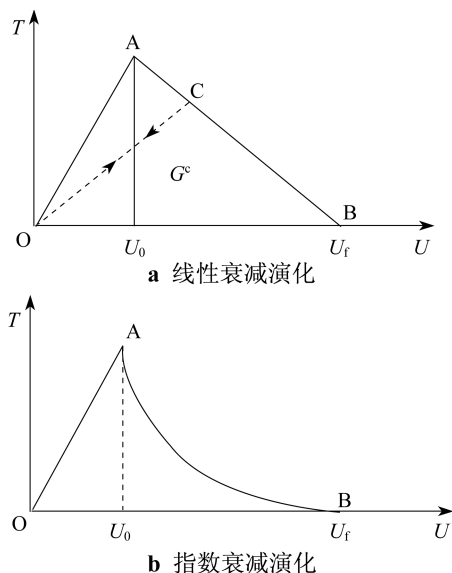


图 2 常用的 TSL 衰减模式

这两种演化模式都是在只受法向拉力作用下, 应力值随着相对位移的增加而增大, 当界面元的相对位移大于其损伤点  $U_0$  所对应的位移后, 随着相对位移的增加, 界面元刚度开始下降; 当界面元相对位移增加至图中 B 点时, 界面元刚度降为零, 此时界面元的相对位移为  $U_f$ , 界面元连接的上下两个单元可以完全分离. 曲线 O-A-B-O 所包围的面积即为材料破坏过程中的应变能释放率, 数值上等于新生裂纹面的界面表面能.

利用内聚力单元模拟裂纹的扩展, 首先要将

内聚力单元嵌入有限元模型中, 嵌入的方式有两种: 一是在可能出现裂纹的路径中插入内聚力单元; 二是在数值模拟的过程中, 在需要的时间和位置自适应地插入内聚力单元.

在使用内聚力模型分析工程材料的失效问题时, 有限元分析是非常重要的.<sup>[18]</sup> 对于内聚力模型本身的适用性不存在很大争议, 但是如何在数值模拟中植入内聚力模型, 提出了很多种方法, 如 XIE D 等人将其分为两种: 一是连续内聚力模型, 二是离散型内聚力模型.<sup>[19-20]</sup>

连续内聚力模型认为断裂过程区是一个连续的柔性层, 连续介质的本构关系采用内聚力法则. 目前常用的连续内聚力单元为 CAMANHD P P 等人<sup>[21]</sup> 提出的零厚度的界面内聚力单元.

离散内聚力模型认为断裂过程区为一个离散的弹簧基础, 弹簧基础连接两个裂纹表面相邻的节点对, 用非线性类型的弹簧基础模拟内聚力特性.

## 3 内聚力模型的应用

CZM 已经被广泛应用于研究多种材料的失效现象, 其研究对象包括脆性材料、准脆性材料、高分子聚合物材料、功能梯度材料、纳米材料、单晶和多晶材料等. 此外, CZM 也被应用于疲劳裂纹扩展、钢筋混凝土的粘结滑移、材料的动态断裂等现象的研究中.

### 3.1 脆性材料

针对弹塑性分析中小范围屈服条件下线弹性裂纹的分析, 研究者对内聚区作了很多种假设. 1967 年, KEER L M<sup>[22]</sup> 假定内聚区牵引力沿着光滑连接的裂纹表面以经典弹性力学本构方程分布. 在 Keer 方法的基础上, CRIBB J L 和 TOMKINS B<sup>[23]</sup> 得到了一种满足脆性材料裂纹尖端应力分布的内聚区应力与裂纹面张开位移的关系. 随后, SMITH E<sup>[24]</sup> 得到了内聚区应力 - 张开位移的通用理论, 并且可以用一系列简单公式表达其关系.

对于混凝土、岩石、纤维混凝土等准脆性材料存在相对较大的非线性断裂区域, 其表现出的明显非线性断裂特性和断裂参数, 存在显著的尺寸效应现象引起了国内外许多学者的关注. HILL-ERBORG A 等人<sup>[25]</sup> 在模拟混凝土材料断裂的过

程中引入了线性软化模型,该模型由材料的内聚力强度和产生新的裂纹面释放的断裂能决定.之后有许多断裂分析模型得到了应用,如等效裂纹、双参数和双 K 断裂模型,以及由初始断裂能和总断裂能确定的用于研究混凝土断裂及裂纹尺寸效应的双线性软化模型等.

WEIBULL W<sup>[26]</sup>关于由随机统计性引起的尺寸效应的研究、CARPINTERI A<sup>[27]</sup>关于裂纹的分形特性引起的尺寸效应的研究和 BAIANT Z P 等人<sup>[28]</sup>关于裂纹的能量释放和应力重新分布引起的尺寸效应的研究是国内外关于混凝土材料断裂和裂纹尺寸效应研究的 3 个主要方面.

另外,相关学者对纤维混凝土的断裂过程也进行了研究,纤维混凝土的断裂要考虑素混凝土失效以及与纤维相关的失效机制.

### 3.2 聚合物

聚合物典型的失效主要有材料的剪切屈服和银纹的产生两种形式.与剪切屈服相比,由于裂纹尖端应力集中而导致的银纹生成和积累更容易造成聚合物材料的失效,细观层次的银纹形成和断裂表现为宏观层次的裂纹生成和扩展.内聚力在聚合物材料银纹扩展的研究中得到了广泛应用.聚合物的断裂过程包括银纹的萌生、银纹的扩展和银纹的断裂 3 个过程.文献[29]应用基于细观力学的内聚表面模型来分析聚合物银纹断裂的 3 个阶段,研究者将高密度的内聚表面插入连续介质中,模拟了聚合物中的大规模银纹形成现象.

### 3.3 纳米晶金属

金属材料的断裂过程一般要经历微裂纹的萌生、裂纹的扩展和裂纹扩展到临界尺寸后扩展失稳至完全断裂几个阶段.随着晶粒尺寸的减小,与较粗晶金属相比,微、纳米晶金属材料的变形机制出现了很多新特征,晶粒内部会产生较大的应变梯度,原子模拟和传统连续介质方法无法解释材料的微结构由于尺寸效应而表现出的强化和尺度效应.于是表征超细晶和纳米晶金属晶粒内部不均匀塑性变形的基于机制的应变梯度塑性 (CMSSG)理论和模拟晶粒间滑移与分离,以及晶间微裂纹的萌生和扩展的内聚力界面模型在纳米晶金属断裂研究中得到广泛应用.

HUANG Y 等人<sup>[30]</sup>基于 Taylor 位错模型建

立了 CMSSG,只包含传统应力、应变分量的 CMSSG 理论的本构方程可以表示为:

$$\dot{\sigma}_{ij} = K \dot{\xi}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left\{ \dot{\xi}'_{ij} - \frac{3\dot{\xi}}{2\sigma_e} \left[ \frac{\sigma_e}{\sigma_y \sqrt{f^2 (\xi^p + \ln \eta^p)}} \right]^m \sigma'_{ij} \right\} \quad (9)$$

式中: $\dot{\sigma}_{ij}$ ——应力率;

$K$ ——体积弹性模量;

$\dot{\xi}_{kk}$ ——体应变率;

$\delta_{ij}$ ——Kronecker 张量;

$\mu$ ——剪切模量;

$\dot{\xi}'_{ij}$ ——应变率偏量;

$\dot{\xi}$ ——等效应变率;

$\sigma_e$ ——von Mises 等效应力;

$\sigma_y$ ——材料初始屈服强度;

$m$ ——率敏感性指数;

$\sigma'_{ij}$ ——应力偏量;

$f$ ——单轴拉伸时塑性应变  $\xi^p$  的无量纲函数.

基于该本构关系,利用内聚力模型,吴波等人<sup>[31]</sup>对纳米晶 Ni 晶间断裂进行了数值模拟.该研究利用 Voronoi tessellation 方法建立随机晶粒模型,假定晶间断裂是纳米晶 Ni 惟一的断裂失效模式,验证了纳米晶金属晶粒的尺度效应会对材料宏观力学性能产生重要影响,得到了纳米晶 Ni 晶间微裂纹的萌生和扩展很大程度上依赖于晶粒几何形状和晶粒材料特性分布的结果.吴波等人<sup>[32]</sup>利用同样的方法,得出了随着纳米晶铜晶粒尺寸和晶粒薄层间距的减小,晶内应变梯度效应增强、材料得到强化的结论.

### 3.4 疲劳裂纹增长

内聚力模型已成功地模拟了很多材料的单调断裂问题.对于疲劳裂纹而言,由于载荷的施加与卸载,致使裂纹尖端应力重新分布,疲劳裂纹扩展产生阻滞现象.因此,在循环载荷下,适合疲劳裂纹扩展的内聚力模型的开发成为解决此类问题的关键.YANG B 等人<sup>[33]</sup>在模拟材料的疲劳裂纹扩展时,提出了一种内聚力模型,该模型模拟准脆性材料在任意载荷下的疲劳裂纹的萌生和扩展比经典断裂力学更具优势和灵活性.BOUVARD J L 等人<sup>[34]</sup>在研究单晶高温合金疲劳裂纹扩展时,提出

了一种基于损伤演化的内聚力模型,该模型为不可逆转的内聚力模型,不仅能够解决带预置裂纹纯疲劳裂纹、高温下蠕变疲劳的萌生和扩展,还可以应用于复杂载荷下及几何形状复杂试样的裂纹扩展。

## 4 结 论

(1) 相对于传统断裂力学,内聚力模型在模拟裂纹前缘、裂纹萌生过程中塑性区的演化过程有很大的优势;

(2) 内聚力模型与有限元算法的结合推动了内聚力模型的发展,为材料塑形断裂的研究提供了强有力的手段;

(3) 内聚力模型可用于研究裂纹尖端塑性变形、静力和疲劳载荷条件下的蠕变开裂,以及金属、岩土材料及混凝土、复合材料及纳米晶等多种材料的裂纹萌生与裂纹扩展。

### 参考文献:

- [ 1 ] GIRIFFITH A A. The phenomena of rupture and flow in solids[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1921, 221 (583-593): 163-198.
- [ 2 ] 王自强,陈少华. 高等断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 6-9.
- [ 3 ] IRWIN G R. Fracture dynamics in fracture of metals[Z]. Cleveland, Am. Soc. Metals, 1948: 147-166.
- [ 4 ] OROWAN E. Fracture and strength of solids[J]. Reports on Progress in Physics, 1948 (12): 185.
- [ 5 ] IRWIN G R. Analysis of stress and strains near the end of a crack transversing a plate [J]. Applied Mechanics, 1957 (24): 361-364.
- [ 6 ] PARIS P C, GOMEZ M P. A rational analytic theory of fatigue[J]. The Trend in Engineering, 1961 (13): 9-14.
- [ 7 ] RICE J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks [J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35(2): 379-386.
- [ 8 ] 吴艳青,张克实. 利用内聚力模型(CZM)模拟弹粘塑性多晶体的裂纹扩展[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(4): 454-462.
- [ 9 ] DUGDALE D S. Yielding of steel sheets containing slits[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1960, 8(2): 100-108.
- [ 10 ] BARENBLATT G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture[J]. Advances in Applied Mechanics, 1962(7): 55-125.
- [ 11 ] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and Concrete Research, 1976(6): 773-782.
- [ 12 ] NEEDLEMAN A. An analysis of tensile decohesion along an interface[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990, 38(3): 289-324.
- [ 13 ] KOLHE R, TANG S, HUI C Y, *et al.* Cohesive properties of nickel-alumina interfaces determined via simulations of ductile bridging experiments[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36(36): 5 573-5 595.
- [ 14 ] TVERGAARD V. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal[J]. Materials Science and Engineering: A, 1990, 125(2): 203-213.
- [ 15 ] TVERGAARD V, HUTCHINSON J W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness[J]. Mechanics and Physics of Solids, 1993, 41(6): 1 119-1 135.
- [ 16 ] GEUBELLE P H, BAYLOR J S. Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation[J]. Composites Part B: Engineering, 1998, 29(5): 589-602.
- [ 17 ] NEEDLEMAN A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding [J]. Journal of Applied Mechanics, 1987, 54(3): 525-531.
- [ 18 ] 何文涛. 离散内聚力模型及其应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2013.
- [ 19 ] XIE D, SALVI A G, SUN C, *et al.* Discrete cohesive zone model to simulate static fracture in 2D triaxially braided carbon fiber composite [J]. Journal of Composite Materials, 2006, 40(22): 2 025-2 046.
- [ 20 ] XIE D, WAAS A M. Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2006, 73(13): 1 783-1 796.
- [ 21 ] CAMANHO P P, DAVILA C G, DE MOURA M F. Numerical simulation of mixed-mode progressive crack in composite materials[J]. Journal of Composite Materials, 2003, 37(16): 1 415-1 438.
- [ 22 ] KEER L M. Stress distribution at the edge of an equilibrium crack[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1964, 12(3): 149-163.
- [ 23 ] CRIBB J L, TOMKINS B. On the nature of the stress at the tip of a perfectly brittle crack[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, 15(2): 135-140.
- [ 24 ] SMITH E. A generalization of Elliott's model of a crack tip [J]. International Journal of Fracture, 1975, 11(2): 295-299.
- [ 25 ] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and Concrete Research, 1976, 6(6): 773-781.
- [ 26 ] WEIBULL W. A statistical theory of the strength of materials [M]. Stockholm, Sweden: Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, 1939: 151-155.
- [ 27 ] CARPINTERI A. Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties[J]. Mechanics of Materials, 1994, 18(2): 89-101.

